RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 dicembre 1902.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.* Nota I di Onorato Niccoletti, presentata dal Socio Dini.

In una Memoria, collo stesso titolo di questa Nota, pubblicata nell'ultimo fascicolo degli Acta Mathematica [1], il sig. P. Stäckel con un metodo, di cui la prima idea va ricercata in una osservazione del Weierstrass [2], costruisce un esempio notevole di una funzione *analitica* e *trascendente* y di una variabile complessa x, tale che sia essa, sia la funzione inversa $x(y)$ in *tutto* il loro campo di esistenza (che può anche essere l'intero piano complesso dell'una o dell'altra variabile) assumono un valore algebrico per ogni valore algebrico di quella che si riguarda come la variabile indipendente.

Dall'esempio del sig. Stäckel risulta, come la proprietà precedente non sia caratteristica per le funzioni algebriche di una variabile complessa; ma se si osserva, insieme collo Stäckel, che per una funzione algebrica di una variabile complessa, sia la funzione inversa, sia qualsiasi loro derivata è ancora una funzione algebrica e quindi assume un valore algebrico per ogni valore algebrico di quella che si riguarda come la variabile indipendente, è da pensare se non sia questa piuttosto una proprietà caratteristica delle funzioni algebriche.

(1) Cf. Stäckel, *Aritmetische Eigenschaften analytischer Functionen* (Acta Mathematica, Tomo 25°, pag. 371-383).

(2) Idem (Math. Annalen, Bd. 46, S. 516).

Ora questo non è; è infatti possibile costruire una funzione *trascendente* di una variabile complessa che abbia la proprietà ora detta; più generalmente anzi: *è possibile costruire un'equazione trascendente* (*a coefficienti razionali*):

$$\mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

in n *variabili complesse* $x_1 \dots x_n$, *tale che in un campo conveniente* (che può essere anche tutto l' S_n complesso $(x_1 \dots x_n)$) *definisca una qualunque,* x_i, *di esse variabili come funzione analitica e trascendente delle altre* $n-1$, *ed in guisa che, ove tra le* $x_1 \dots x_n$ *si ponga un qualunque sistema di relazioni algebriche,* (*a coefficienti razionali*), *e la* x_i *e le sue derivate di un ordine qualunque si riducano a funzioni algebriche di alcune tra le* $x_1 x_2 \dots x_{i-1}\ x_{i+1} \dots x_n$.

1. Sia per questo:

$$(1)\quad f(x_1 x_2 \dots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_n \leq m)$$

una funzione razionale intera di grado m, *a coefficienti razionali interi e privi di fattori comuni* [1], delle n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, irriducibile in queste variabili nel campo assoluto di razionalità. Estendendo una definizione di Cantor [2], diremo *altezza* della funzione f, ed indicheremo col simbolo h_f il numero:

$$(2)\qquad h_f = (m-1) + \Sigma |A_{q_1 q_2 \dots q_n}|;$$

e diremo anche che h_f è l'altezza della equazione algebrica [3]:

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0.$$

Quando la f abbia poi i coefficienti razionali, ma non intieri, diremo sua altezza l'altezza del prodotto kf, dove k è il minimo multiplo comune dei denominatori dei coefficienti della f.

Vi è un numero finito di funzioni f [4] *di* n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *che hanno una determinata altezza* h: assegnato infatti h, si hanno dalla (2) un numero finito di valori possibili di m e delle $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ [5].

(1) Considerazioni affatto analoghe valgono evidentemente, con lievi modificazioni, oltrechè nel campo assoluto di razionalità, anche nel campo $R(i)$ dei numeri *intieri* di Gauss e più generalmente in qualsiasi corpo algebrico assegnato.

(2) Cf. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs der reeller algebraischer Zahlen* (Crelle, Bd. 77, 1873, pag. 258).

(3) Ora e nel seguito, seguendo i concetti aritmetici di Kronecker, supponiamo sempre che le funzioni e le equazioni che consideriamo siano a coefficienti *razionali.*

(4) Quando non diciamo altro, intendiamo: *funzione razionale intiera irriducibile, a coefficienti razionali intieri e privi di fattori comuni.*

(5) Ne segue in particolare, per un noto teorema della teoria degli aggregati: *Le equazioni algebriche in* n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *formano un insieme numerabile.*

Chiamiamo ora $\varphi_h(x_1 x_2 \dots x_n)$ il prodotto di tutte le funzioni f di altezza h; e poniamo:

(3) $$\psi_h(x_1 x_2 \dots x_n) = \prod_1^h{}_\nu\, \varphi_\nu(x_1 x_2 \dots x_n) \quad ; \quad \psi_0(x_1 x_2 \dots x_n) = 1 ;$$

sarà ψ_h un polinomio a coefficienti razionali intieri nelle $x_1 \dots x_n$, *il cui grado diciamo* λ_h.

2. Sia ora:

(4) $$\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_r \dots\dots$$

una successione *divergente* di numeri intieri e positivi; sia:

(5) $$\theta_0(x_1 x_2 \dots x_n),\ \theta_1(x_1 \dots x_n); \dots \theta_r(x_1 \dots x_n) \dots\dots\dots$$

una successione di polinomî a coefficienti razionali intieri (i cui gradi diciamo $\sigma_0, \sigma_1 \dots \sigma_r \dots\dots$) ai quali non imponiamo per ora alcuna condizione.

Definiamo ancora n successioni *divergenti* di numeri intieri e positivi $\mu_r^{(i)}$ $(i = 1, 2 \dots n;\ r = 1, 2 \dots\dots)$ dalle relazioni ricorrenti:

(6) $$\mu_{r+1}^{(i)} \geq \mu_r^{(i)} + \varrho_r \lambda_r + \sigma_r + 1 \qquad (\mu_0^{(i)} = 0);$$

e poniamo infine, per qualunque r:

(7) $$\omega_r(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{\mu_r^{(1)}} x_2^{\mu_r^{(2)}} \dots x_n^{\mu_r^{(n)}}\, \theta_r(x_1 x_2 \dots x_n) \{\psi_r(x_1 x_2 \dots x_n)\}^{\varrho_r} \ (r = 0, 1 \dots);$$

sarà ω_r un polinomio in $x_1 x_2 \dots x_n$ a coefficienti razionali intieri, di cui è opportuno notare alcune semplici proprietà.

a) Tranne al più per $r = 0$, si ha:

$$\omega_r(x_1 \dots x_{i-1}, 0, x_{i+1} \dots x_n) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

b) Il grado di ω_r nella variabile x_i è maggiore od uguale a $\mu_r^{(i)}$, minore od uguale a $\mu_r^{(i)} + \lambda_r \varrho_r + \sigma_r = \mu_{r+1}^{(i)} - 1$. Ne segue che: *due polinomî* ω_r, ω_s (per $r \neq s$) *non hanno termini simili.*

c) *Se tra le* $x_1 x_2 \dots x_n$ *si pone un' equazione algebrica* (*irriducibile*):

(8) $$g(x_1 x_2 \dots x_n) = 0,$$

tutte le ω_r *per cui è* $r \geq h_g$, *si annullano.* Per $r \geq h_g$, il polinomio $\psi_r(x_1 \dots x_n)$ e quindi anche ω_r ha infatti il fattore $g(x_1 \dots x_n)$.

d) Una derivata qualunque del polinomio ω_r, di ordine minore di ϱ_r, contiene ancora il fattore $\psi_r(x_1 \dots x_n)$: ne segue, poichè $\lim_{r=\infty} \varrho_r = +\infty$, che: *se le* $x_1 \dots x_n$ *sono legate dalla equazione algebrica* (8), *insieme colle* ω_r *si annullano tutte le loro derivate parziali di ordine* m, *per cui si ha insieme*: $r \geq h_g$; $\varrho_r > m$.

3. Consideriamo ora la serie:

$$(9) \qquad \sum_0^{\infty}{}_h u_h \, \omega_h (x_1 \dots x_n) ,$$

in cui le u_h *sono numeri razionali, che ora designeremo in modo più preciso*. Se nella (9) eseguiamo tutte le moltiplicazioni indicate, per la proprietà *b*) dei polinomî ω_r, non vi saranno mai termini simili provenienti da termini diversi della serie stessa; ne risulta quindi una serie *npla* di potenze:

$$(10) \qquad \Sigma a_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} ,$$

in cui ogni coefficiente $a_{q_1 \dots q_n}$ è il prodotto di un numero intero per *una sola* u_r; è inoltre evidente che una stessa u_r figura come fattore in un numero *finito* di coefficienti $a_{q_1 q_2 \dots q_n}$.

Indichiamo ora con

$$(11) \qquad \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$$

una serie *npla* di potenze delle $x_1 x_2 \dots x_n$, la quale converga *assolutamente* ed *uniformemente* in un certo campo C ad n dimensioni (che può essere anche tutto l' S_n complesso $(x_1 \dots x_n)$); sarà *sempre* possibile soddisfare *con valori razionali delle* u alle disuguaglianze:

$$(12) \qquad | a_{q_1 q_2 \dots q_n} | < | A_{q_1 q_2 \dots q_n} | ;$$

queste disuguaglianze si tradurranno infatti in altre sulle u_r della forma:

$$(13) \qquad |u_r| < \varepsilon_r \quad (r = 0, 1, 2 \dots)$$

essendo ε_r un numero reale e positivo (e non sempre nullo), che per ogni singolo valore di r può ritenersi perfettamente determinato dalle disuguaglianze (12).

Supponiamo per semplicità che la (11) converga in tutto l' S_n complesso $(x_1 x_2 \dots x_n)$; allora, *se almeno da un certo valore di* r *in poi, le* (13) *sono soddisfatte*, posto:

$$(14) \quad \mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_0^{\infty}{}_h u_h \, \omega_h (x_1 x_2 \dots x_n) = \Sigma a_{q_1 q_2 \dots q^n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} ,$$

sarà $\mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n)$ una *trascendente intera* nelle n variabili complesse $x_1 x_2 \dots x_n$; e tali saranno anche tutte le sue derivate parziali di un ordine qualunque; queste inoltre si potranno calcolare derivando termine a termine, tante volte quante si vuole, la serie (9).

Non è inutile osservare che: *entro i limiti fissati dalle disuguaglianze* (13) *i numeri razionali* u_r $(r = 0, 1, 2 \dots)$ *possono prendersi affatto arbitrariamente*.

4. Sia ora l'equazione:

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 ; \tag{15}$$

sotto alcune condizioni iniziali, che possiamo sempre supporre verificate in un certo punto di S_n (ad es.: l'origine, il che, per la proprietà a) dei polinomî ω_r, porta delle condizioni relative al solo polinomio $\theta_0(x_1 \dots x_n)$) essa definisce in una certa regione di S_n una varietà analitica V ad n dimensioni. In questa regione noi svolgeremo le nostre considerazioni.

A) Qualsiasi varietà algebrica di S_n sega la varietà V in una varietà algebrica.

Diciamo *varietà algebrica* in S_n la totalità dei *punti* $(x_1 \dots x_n)$ che soddisfanno ad un sistema di equazioni algebriche (che definiscono la varietà):

$$g_\varrho(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2 \dots q). \tag{16}$$

L'eventuale sezione della varietà definita dalle equazioni (16) colla nostra varietà V si ottiene infatti considerando simultaneamente le equazioni (15) e (16). Ma, indicando con $h+1$ la *massima* altezza di un fattore irriducibile di una g_ϱ $(\varrho = 1, 2 \dots q)$, nella $F(x_1 \dots x_n)$, per la proprietà c) dei polinomî ω_r, si annullano allora tutte le ω_r, per cui è $r > h$; ponendo adunque, per qualunque t:

$$F^{(t)}(x_1 \dots x_n) = \sum_0^t {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1 \dots x_n), \tag{17}$$

alle equazioni (15) *e* (16) *può sostituirsi il sistema di* $q+1$ *equazioni algebriche*:

$$F^{(h)}(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 ; \quad g_\varrho(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \quad (\varrho = 1, 2 \dots q), \tag{18}$$

il che dimostra la nostra asserzione.

Se $x_1 \dots x_n$ è un punto di V, diremo *elemento di ordine* s di V il sistema:

$$(x_1 x_2 \dots x_n ; dx_1, dx_2 \dots dx_n ; \dots ; d^s x_1, d^s x_2, \dots d^s x_n)$$

delle coordinate del punto e dei loro differenziali fino all'ordine s, *presi sulla varietà* V, in guisa cioè che la $F = 0$ e le equazioni che si hanno da essa, differenziandola fino all'ordine s, sian soddisfatte. Abbiamo allora:

B) Qualsiasi elemento di ordine finito della varietà V, relativo ad un punto della sezione di V con una varietà algebrica qualunque di S_n, è ancora algebrico.

Insieme colle equazioni (15) e (16) consideriamo infatti quelle che si hanno, differenziando la $F(x_1 \dots x_n)$ fino all'ordine s:

$$d^t F = 0 \qquad (t = 1, 2 \dots s). \tag{19}$$

Il primo membro di ciascuna delle (19) è una funzione razionale intiera dei differenziali $d^\mu x_i$ $(i=1,2\ldots n\,,\ \mu=1,2\ldots s)$ i cui coefficienti sono derivate parziali della F di *ordine non superiore ad* s. Ove adunque si abbian le (16), saranno nulle, per la proprietà d) dei polinomî ω_r, tutti quei polinomî e le loro derivate per cui è insieme $r>h$, $\varrho_r>s$: ciascuna delle (19) si riduce cioè ad un polinomio in tutti i suoi argomenti. Ne segue appunto il teorema B).

Più generalmente si pongano tra le $x_1\,x_2\ldots x_n$ delle relazioni *algebrico-differenziali* (a coefficienti razionali):

$$(20)\qquad G_\rho(x_1\,x_2\ldots x_n\,;dx_1\ldots dx_n\ldots;d^kx_1\ldots d^kx_n)=0\qquad(\varrho=1,2\ldots q)$$

di ordine *non maggiore* di k, le quali sian compatibili, e tra cui vi sia *almeno un' equazione algebrica*:

$$g\,(x_1\,x_2\ldots x_n)=0\,.$$

Lo stesso procedimento dimostra allora che:

C) Qualunque elemento della varietà V di ordine maggiore od uguale a k relativo ad un punto della sezione di V con un integrale delle equazioni (20) è ancora algebrico.

La varietà V passi per l'origine ed in questo punto *tutte* le derivate $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ sian diverse da zero, il che può farsi evidentemente in infiniti modi, prendendo convenientemente il *primo* polinomio θ_0 della successione (5); dalla $F=0$ può allora trarsi una qualunque delle x, ad es.: la x_i, in una serie di potenze delle altre $n-1$:

$$(21)\ x_i=P\,(x_1\,,\ldots x_{i-1}\,,x_{i+1}\,,\ldots x_n)\qquad(i=1,2\ldots n)\quad;\quad P(0)=0$$

questa serie converge allora in un certo intorno (ad $n-1$ dimensioni e di ampiezza non nulla) del punto $x_1=x_2=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0$, ed in questo intorno definisce la x_i come funzione analitica e monodroma delle $x_1\ldots x_{i-1}\,x_{i+1}\ldots x_n$, che ha evidentemente le proprietà seguenti:

D) Se tra le $x_1\,x_2\ldots x_n$ si pone un sistema qualunque di relazioni algebriche, una *qualunque* di esse variabili, ad es. la x_i, e le sue derivate (rispetto alle altre) di un ordine qualunque (calcolate dalla (21)) si riducono a funzioni algebriche di alcune tra esse variabili.

5. Il risultato che precede, per quanto notevole, non basta, come osserva a ragione lo Stäckel nella Memoria citata, ad assicurare dell'esistenza di funzioni analitiche e *trascendenti* di una o più variabili complesse, che abbian le proprietà espresse dal teorema D). Si potrebbe infatti pensare che l'equazione $F(x_1\,x_2\ldots x_n)=0$, pure essendo trascendente, definisse in

qualunque punto *algebrico* $(\xi_1 \dots \xi_n)$ della varietà V soltanto degli *elementi* (nel senso di Weierstrass) di funzioni analitiche *algebriche*:

$$(22)\ x_i - \xi_i = P_i(x_1 - \xi_1; \dots x_{i-1} - \xi_{i-1}; x_{i+1} - \xi_{i+1}; \dots x_n - \xi_n)\ (P(0)=0; i=1,2\dots n);$$

potrebbe cioè supporsi che *qualunque* elemento (22) relativo ad un punto *algebrico* (ξ) della varietà V, dedotto dalla $F = 0$, *soddisfacesse sempre ad una equazione algebrica*:

$$g_{(\xi)}\,(x_1\, x_2 \dots x_n) = 0\,,$$

variabile da punto a punto, da elemento ad elemento; per esprimerci chiaramente, se non con tutto rigore, si potrebbe pensare cioè che la varietà V risultasse costituita dalla riunione di infinite varietà algebriche, distinte o coincidenti, di S_n, in guisa da non poter più allora affermare la trascendenza di nessuno degli elementi (22) relativi ad un qualunque punto algebrico di V.

Per quanto, avendo riguardo a tutto quello che vi ha di arbitrario nella costruzione della $F(x_1 \dots x_n)$, un tale eventualità sembri estremamente improbabile, pure finchè non si riesca, magari imponendo alla F ulteriori condizioni, ad escluderla completamente, essa costituisce una grave difficoltà che può infirmare le considerazioni precedenti. Fortunatamente questa difficoltà può rimuoversi, con un metodo, a nostro credere, geniale ed elegante, sebbene un po' artificioso, che, dovuto allo Stäckel per una equazione a due variabili x ed y molto più particolare della nostra, si può estendere, convenientemente modificato, anche al problema generale che ora ci occupa. Se l'Accademia me lo permette, consacrerò a questa dimostrazione una prossima Nota.

Mineralogia. — *La bournonite nella miniera della Argentiera della Nurra (Portotorres, Sardegna).* Nota del prof. Domenico Lovisato, presentata dal Socio Struever.

Presso all'estrema parte nord-ovest dell'isola vediamo per non molto risorgere l'uronico della massa dell'Iglesiente, qui sollevato dalle granuliti, che per poco compariscono all'Asinara.

Le elevazioni, che si veggono dal Capo dell'Agentiera al Capo Falcone, sono generalmente formate da schisti quarziferi, talvolta tempestati di granati e contenenti all'Istintino, sebbene in piccolissima quantità, la *Tantalite ferrica* (1).

In questi schisti quarziferi s'annidano gli importanti filoni della miniera dell'Argentiera, costituendo un giacimento irregolare in direzione ed in ricchezza.

(1) Lovisato, *Notizia sopra alcune specie minerali nuove per la Sardegna.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, vol. VII, primo sem., serie 5ª, fasc. 8°. Roma 1898.

Sebbene non sia scopo della presente Nota di fare la descrizione di questa miniera, sulla quale però si hanno assai scarse notizie nella letteratura mineralogica, per quanto io mi sappia avendone parlato il Barelli (1), il Baldracco (2), il Lamarmora (3), il Sella (4), il Jervis (5), ecc., non sarà male ricordare come da antico codice si rilevi che Gonnario da Torres nel 1131 faceva donazione della metà dell'Argentiera della Nurra alla chiesa primiziale di Santa Maria di Pisa (6).

Sembra però che i lavori più antichi sieno anteriori ai Pisani, e che il filone sia stato lavorato principalmente verso la sua parte sud-ovest; però dagli avanzi degli utensili in legno trovati in quelle lavorazioni è assai difficile indurne l'età.

Pel Barelli i minerali dellArgentiera sarebbero: *piombo solforato argentifero* e *zinco solforato* in una matrice di *quarzo e ferro ossidato*; pel Sella, che parla di filoni a matrice di *quarzo* con *fahlerz*, i minerali sarebbero: *blenda*, *galena* e *fahlerz*; pel Jervis l'Argentiera darebbe: *blenda*, *galena*, *stibína*, *tetraedrite*, *tennantite* (7), *pirite* colla ganga di quarzo ed in piccola quantità anche di barite. In generale l'Argentiera era ed è ritenuta come una miniera di *blenda*, *galena* e *fahlerz* in ganga di quarzo con pirite di ferro e con presenza qua e là di stibina.

La blenda costituisce la parte più importante del filone: raramente presentasi in cristalli perfetti, ma è varia nella sua struttura, generalmente cristallina, talvolta a larghe lamelle, talvolta compatta e friabile.

Non posso dire nulla per riguardo alla sua composizione, cioè, se colla blenda normale vi compariscano le varietà ferrifera (*Marmatite*), cadmifera (*Przibramite*), mercuriale, stannifera, ecc., perchè non ho avuto campo di occuparmi delle sue analisi, nè la blenda essendo l'obbiettivo di questa mia Nota, che ha invece per iscopo di mostrare che mentre fino ad oggi si è ritenuto da tutti il *fahlerz* come uno dei principali minerali dell'Argentiera

(1) *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna.* Torino 1835, pag. 597-8.

(2) *Cenni sulla costituzione metallifera della Sardegna.* Torino 1854, pag. 286-302.

(3) *Voyage en Sardaigne.* Troisième partie, tome I, Turin 1857, pag. 91-3.

(4) *Condizioni dell' industria mineraria nell' isola di Sardegna.* Relazione alla Camera dei Deputati per la Commissione d'inchiesta. Maggio 1871, pag. 48-9.

(5) *I tesori sotterranei dell'Italia.* Parte terza. *Regione delle isole: Sardegna e Sicilia.* Roma 1881, pag. 139-43.

(6) Tola, *Codex diplomaticus Sardiniae.* Tomo I, pag. 207. Vedi Jervis, op. citata, pag. 140.

(7) Hintze, nel suo *Handbuch der Mineralogie* (Siebente Lieferung, 1902, pag. 1101) sulla fede del Jervis cita la *tennantite* per l'Argentiera della Nurra ed anche per Capo Marargiu in quel di Bosa, aggiungendo questo dato, da me non conosciuto: *in Sarrabus* (Wergl. S. 793) *bei Baccu Arrodas Kleine Tetraëder auf Kalkspath* (Traverso, N. Jahrb. 1899, 2, 220).

della Nurra, questa specie minerale manca assolutamente in quella miniera, essendo *Bournonite* il minerale finora creduto *fahlerz.*

Già fino dal 1885 io aveva sospettato trattarsi di *Bournonite* in quelle massecole splendenti, che compariscono specialmente alla dipendenza della blenda col quarzo all'Argentiera, giacchè fra il materiale del valore di lire 5029, 15, lasciato da me in dono all'Università di Sassari, quando da quella passai a questa Università, al n. 158 d'inventario si trova questo cartello: *Ventitre campioni di Tetraedrite con bournonite, galena, blenda, ecc. dell'Argentiera (Nurra).*

Non ho poi visitato più quella interessante miniera, sebbene frequenti sieno state le mie visite alla Nurra, nè mi sono arbitrato di manomettere un campione, che si conserva in questo Museo al n. 961 del vecchio inventario, compreso nel gruppo 12 (42) del nuovo, e notato come *Panabase dell'Argentiera della Nurra,* bellissimo esemplare che dopo blenda con massecole e venuzze di quarzo porta il minerale, creduto finora *fahlerz,* attraversato da vena di quarzo con moschette e secrezioni di calcopirite. Esaminai però alcuni frammenti di minerali di quella miniera, portati con me da Sassari e che avrebbero dovuto contenere anche la tetraedrite; però mi risultarono tutti di pura galena, poverissima d'argento, ed assolutamente priva di rame. Esaminai pure altri campioni, che graziosamente mi furono inviati in dono dall'egregio e carissimo sig. Antonio Mele, contabile-cassiere a quella miniera, ma anche in questi non rinvenni il rame. Il mio dubbio allora che pel *fahlerz* si trattasse di un nome usurpato si fece maggiore e l'esternai per lettera al direttore di quella miniera sig. ing. Attilio Daneri, colla preghiera mi volesse inviare alcuni campioncini del minerale più caratteristico, che passava col nome di *fahlerz* colassù.

Contemporaneamente scrivea all'on. Castoldi, direttore generale delle miniere di Montevecchio, pregandolo di mandarmi qualche esemplare del minerale, che nella concessione di Piccalina, a levante di quella ricchissima miniera, veniva indicato col nome di *fahlerz,* dubitando anche per quello dello stesso errore: tanto più m'interessava di vedere qualcuno degli esemplari di Piccalina, inquantochè mi ricordava di aver sentito una volta, che colà s'era trovato il *fahlerz* anche in cristalli, senza però ch'io l'avessi mai potuto vedere, per quante volte avessi manifestato la mia curiosità di esaminarli, giacchè un solo cristallo per Piccalina avrebbe risolta la questione. Sgraziatamente la mia lettera trovò il Castoldi malfermo in salute ed in tali condizioni da non saper dove mettere mano per rintracciare qualcuno degli esemplari da me richiesti. Però esaminati dei frammenti, che a Piccalina mi furono dati come *fahlerz,* si capisce amorfi, a grana finissima, d'un colorito grigio di piombo non brillante e dalla lucentezza ben diversa dalla *bournonite,* mi risultarono tutti come quelli dell'Argentiera di pura galena, poverissima d'argento, ma senza traccia di rame.

Il Daneri invece con sua gentilissima lettera mi accompagnava in pacchetto quattro campioncini del minerale desiderato ed un quinto diverso, dall'egregio direttore in modo speciale raccomandatomi, e del quale dirò in appresso in altra Nota.

I quattro esemplarini, si capisce dei più caratteristici, erano ben diversi dai frammenti dei minerali, da me portati da Sassari come ricordo di quella miniera, e differenti anche dai campioni, che poco tempo prima m'erano stati gentilmente inviati dal sig. Mele, cui vado riconoscente specialmente per due bellissimi esemplari di *blenda* cristallizzata e per qualche bel campione di galena, coperta da un po' di stibina, in qualche punto decomposta in probabile *cervantite*.

Il nuovo minerale, che trovasi particolarmente alla dipendenza della blenda, presentasi sempre massiccio, allo stato compatto, più o meno finamente granuloso, talvolta anche fibroso, in taluni punti pure lamellare e quindi con sfaldatura netta, che manca assolutamente nel *fahlerz:* la frattura è un po' concoidale od ineguale, fragile. La durezza va da 2,5 a 3, anzichè da 3 a 4,5 come nella tetraedrite e nella tennantite; il peso specifico colla bilancia del Mohr mi risultò di 5,78, corrispondente ad una normale bournonite, per la quale la densità va da 5,7 a 5,9: il mio assistente alla temperatura di 28,6° avrebbe ottenuto per un frammento solo 5,35, dovendosi probabilmente questa forte differenza in meno alla mescolanza intima col quarzo in venuzze, in particelle ed anche in cristallini. La lucentezza è metallica, brillantissima: colore grigio d'acciaio al grigio di piombo nerastro, opaco.

Nel tubo chiuso decrepita e dà un sublimato oscuro rossastro d'ossido di ferro e d'antimonio e fonde quasi subito incrostando il tubo. Nel tubo aperto da vapori solforosi ed un sublimato bianco d'acido antimonioso. Al cannello sul carbone fonde facilmente, dando dapprima un'aureola bianca d'acido antimonioso, poi un'aureola marcatissima gialla d'ossido di piombo: il residuo trattato con soda alla fiamma di riduzione dà un globulo di rame. Il minerale non si scioglie completamente nell'acido cloridrico, ma lascia indietro un piccolo residuo quarzoso ed a questo dobbiamo certamente la deficienza che si appalesa nell'analisi: è decomposto dall'acido nitrico, prendendo la soluzione una bella colorazione verde con tendenza al bleu; la soluzione allungata prende una tinta azzurrastra. Oltre la soluzione si ha un residuo di zolfo ed un residuo biancastro contenente antimonio e piombo. Oltre Pb, Sb, S, Cu ed Fe altre reazioni m' avrebbero dato per la nostra sostanza quantità sensibile di Mn con traccie di As, Ag, Mg e Ca.

Non presentando il nostro minerale mai cristalli non era difficile, senza ricorrere ad un'analisi quantitativa confonderlo colle varietà *piombifere di panabase,* giacchè solo quella può mettere in evidenza la quantità grande di piombo esistente, come risulta appunto dall'analisi quantitativa, eseguita

sopra gr. 1,1156 dal mio assistente dott. Carlo Rimatori:

S	19,14
Sb	20,70
As	traccie
Pb . . . . . (.	40,73
Cu	12,22
Fe	4,59
Mn	1,35
CaO, MgO	traccie
	98,73

Evidentemente trattasi di una *bournonite* nel supposto *fahlerz* della miniera dell'Argentiera della Nurra.

Prima ancora che avessi trasmesso i risultati dell'analisi all'ing. Daneri, egli per lettera gentile m'aveva comunicato che essendosi interessato di studiare il supposto *fahlerz* aveva ottenuto coll'analisi Pb = 38,5, Cu = 7,3, Al = 0,07, Au = 2g. per tonnellata, Sb non determinato quantitativamente, dati che suggerivano anche al distinto direttore di quella miniera di considerare il minerale creduto *fahlerz* come una *bournonite,* indotto a ciò anche dalla sfaldatura e dalla durezza.

Dai dati del sig. ing. Daneri si vede che la *bournonite* dell'Argentiera della Nurra contiene, sebbene in piccolissima quantità, anche dell'oro, due grammi per ogni tonnellata di minerale. Sarebbe questo il secondo minerale della Sardegna contenente oro, essendosi rinvenuta da alcuni anni una pirite arsenicale (Mispikel) nella località Conca Sa Pivera (Gonos Pranaceddu) in territorio di Gonosfanadiga verso i limiti di Fluminimaggiore, contenente quattro grammi d'oro per tonnellata.

Prima di chiudere questa Nota dirò che in uno dei quattro campioncini, inviatimi dal sig. Daneri, ho potuto osservare che dopo il quarzo, che separa in quell' esemplare nettamente la blenda dalla bournonite, v' è un'altra sostanza brillante in fiocchetti, in aghetti alla guisa quasi della meneghinite, che un saggio qualitativo sopra un piccolissimo frammento m'avrebbe appalesato per un altro *solfo antimoniuro di piombo* senza *rame,* che potrebbe avere qualche analogia colla jamesonite, più che colla boulangerite. Se potrò avere materiale sufficiente per un'analisi quantitativa, cercherò di determinare anche questa sostanza, ed in pari tempo mi sarà caro di dire una parola sopra l'altro minerale, già accennato, come quello che particolarmente mi fu raccomandato dall'egregio ing. Daneri, e che fin d'ora dirò che, pur avendo l'aspetto d'un minerale d'antimonio, fibroso, impregnato di pirite di ferro, è una curiosa mescolanza di diverse sostanze.

Mineralogia. — *Osservazioni sopra alcuni minerali del granito di Baveno* (1). Nota di Ettore Artini, presentata dal Socio Strüver.

Da varî anni procuro di completare la serie dei minerali di Baveno posseduti dal Museo, allo scopo di contribuire in quanto possibile alla maggior conoscenza di tale veramente classica località mineralogica. Di prezioso aiuto in tali ricerche mi riesce particolarmente l'opera dell'ing. E. Bazzi, intelligente collezionista, raccoglitore acuto e diligente: all'ottimo amico, tanto benemerito del Museo, mi è grato porgere qui una sincera parola di lode e un vivo ringraziamento.

È noto come nelle ricche druse del nostro granito, oltre ad un certo numero di minerali comunissimi, quali il *quarzo*, l'*ortoclasio*, l'*albite*, le *miche*, la *fluorite*, la *calcite*, l'*epidoto*, la *laumontite*, la *jalite*, altri se ne trovino assai meno comuni, come la *babingtonite*, l'*axinite*, la *datolite*, la *chabasite*, la *stilbite*, la *gadolinite* alterata; ed alcuni altri finalmente non vi si incontrino se non con estrema rarità, e quasi soltanto in via eccezionale.

Tra questi va noverata anzitutto, per la sua importanza, l'*apatite*, trovata dallo Strüver nel 1871 (2), e poi, per quanto si sa, non più osservata da altri; così che questo autore in un più recente lavoro scriveva: *L'apatite del granito bianco di Baveno fu da me descritta nel 1871; ma pare quasi che quell'esemplare allora da me trovato fra le tante migliaia di campioni minerali di Baveno che passarono in quei tempi per le mie mani, sia rimasto sino ad ora unico*, ecc. ecc. (3).

Un secondo esemplare venne in luce appunto in questi giorni; e credo perciò non inutile darne alcune parole di descrizione, tanto più che proviene dal granito roseo. È tale campione formato da un gruppetto dei soliti ben noti cristalli di ortoclasio roseo, geminati secondo la legge detta di Baveno; sul maggiore di essi, coperto in parte da una patina di epidoto e da poca jalite, stanno piantati alcuni cristalli di babingtonite della solita forma, e cinque cristalletti di apatite, incolora e abbastanza limpida. Questi cristalli, a differenza di quelli descritti dallo Strüver, sono prismatici, allungati secondo l'asse verticale: il maggiore tra essi misura 3 mm. nel senso dell'asse stesso,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Civico Museo di Milano.

(2) Strüver G., *Note mineralogiche.* — 4. *Apatite e arsenopirite del granito di Baveno e Montorfano.* Atti R. Acc. d. Sc. di Torino, vol. VI, 1871.

(3) Id., *Sui minerali del granito di Alzo.* Rend. R. Acc. d. Lincei, sed. 4. dicembre 1892.

e circa 1 mm. in senso trasversale. Ne staccai due, per sottoporli a misure goniometriche. La forma presentata da tutti indistintamente i cinque cristallini, riferita alla orientazione proposta dal Naumann, risulta dalla seguente combinazione:

$$\}111\{\ \}2\bar{1}\bar{1}\{\ \}5\bar{1}\bar{1}\,.\,11\bar{1}\{\ \}100\,.\,22\bar{1}\{\ \}411\,.\,110\{\ \}41\bar{2}\{.$$

Le facce della base, del prisma e della piramide di 2° ordine sono abbastanza piane, ma non perfette; anche meno adatte a misure precise son quelle delle tre piramidi di 1° ordine, sempre alquanto striate parallelamente alla loro intersezione con la base e col prisma. Dovetti perciò rinunciare a calcolare la costante cristallina di questa apatite, ciò che pur sarebbe stato mio desiderio; e limitarmi a riportare qui gli angoli misurati, confrontandoli coi rispettivi calcolati dal valore fondamentale

$$(100)\,.\,(010) = 68^\circ.\,9'.\,6''$$

altra volta da me determinato per l'apatite del granito elbano [1].

Spigoli misurati	N.	Limiti delle osservazioni	Angoli osservati. Medie	Angoli calcolati
$(5\bar{1}\bar{1})\,.\,(2\bar{1}\bar{1})$	3	30°.26′ — 30°.48′	30°.34′	30°.31′
$(5\bar{1}\bar{1})\,.\,(111)$	5	59. 5 — 59. 51	59. 26	59. 29
$(100)\,.\,(2\bar{1}\bar{1})$	2	49. 58 — 50. 00	49. 59	49. 41
$(100)\,.\,(111)$	7	39. 50 — 40. 35	40. 5	40. 19
$(411)\,.\,(111)$	6	22. 22 — 23. 9	22. 43	22. 59
$(41\bar{2})\,.\,(111)$	3	55. 29 — 55. 41	55. 34	55. 48
$(41\bar{2})\,.\,(5\bar{1}\bar{1})$	5	25. 17 — 25. 41	25. 27	25. 31
$(5\bar{1}\bar{1})\,.\,(1\bar{2}1)$	5	64. 20 — 64. 33	64. 25	64. 29

Anche della *scheelite*, la quale riguardo alla rarità si trova nelle stesse condizioni del precedente minerale, il nostro Museo possiede da poco tempo uno splendido esemplare, dono dell'ing. Bazzi. È una drusa ricca di quarzo, nel granito rosso; oltre alla solita jalite, all'albite e a poco ortoclasio roseo, vi si osservano una diecina di cristalli di scheelite, di color giallo chiaro, cristallograficamente identici a quelli descritti dallo Strüver, ma con facce assai meno perfette, e invece alquanto più grossetti: il maggiore di essi misura circa 5 mm. nel senso dell'asse quaternario.

Alla già non breve lista dei minerali descritti da varî autori posso inoltre aggiungerne due altri, la cui presenza nel granito di Baveno non fu

(1) Artini E., *Apatite dell'Elba.* Rendic. R. Acc. d. Lincei, sed. 24 novembre 1895.

prima d'ora osservata, o almeno scientificamente documentata: la *heulandite* cioè e la *tormalina*.

Della prima si trova solo un cenno affatto vago ed incerto in una Nota del Leuze (1). Io potei studiarne due esemplari: nell'uno è in cristallini limpidi, grossetti (2-3 mm) piantati sul quarzo e sull'ortoclasio roseo, insieme a uno di quei gruppi raggiati di stilbite giallognola già descritti dallo Strüver (2); nell'altro i cristallini, più numerosi e più piccoli, spalmano come una crostina un cristallo di ortoclasio. La forma e le proprietà del minerale nei due esemplari sono identiche. Essi presentano sempre la combinazione:

$$\}010\{\ \}001\{\ \}110\{\ \}201\{\ \}\bar{2}01\{.$$

Le facce di }010{ sono piane e hanno la caratteristica lucentezza madreperlacea, più viva sulle facce di sfaldatura fresca, le quali si producono, al solito, con estrema facilità e perfezione; }001{ e }$\bar{2}$01} sono mediocremente sviluppate, ma abbastanza piane; più ampie e brillanti, ma smosse e ondulate sono quelle di }201{; quelle del prisma verticale sono pure brillanti e ondulate. Riporto qui alcuni degli angoli misurati, facendoli seguire dai valori calcolati partendo dalle costanti determinate da Des Cloizeaux (3):

$$a : b : c = 0.40347 : 1 : 0.42929$$
$$\beta = 88^{\circ}.34'.30''$$

Spigoli misurati	N.	Limiti delle osservazioni	Angoli osservati. Medie	Angoli calcolati
(110) . (010)	4	68°.23′ — 69°.21′	68°.57′	68°. 2′
(201) . (001)	4	63. 19 — 64. 38	63. 50	63. 40
($\bar{2}$01) . (001)	5	66. 23 — 66. 47	66. 35	66. 00
(201) . (20$\bar{1}$)	3	49. 26 — 49. 37	49. 31	50. 20

La forte divergenza fra misura e calcolo non può maravigliare chi pensi alla imperfezione delle forme più sopra lamentata, e conosca le forti oscillazioni nei valori angolari che si osservano nella heulandite.

La perfetta e facile sfaldatura secondo }010} che presenta il minerale, mi permise di studiarne abbastanza completamente le proprietà ottiche non

(1) Leuze A., *Mineralogische Notizen*. Ber. 25 Versamml. Oberrhein. geolog. Ver. Basel, 1892. (In questo lavoro non si capisce bene quando si accenni alla stilbite e quando alla heulandite; infatti vi è ricordata la heulandite (*Stilbit*) come già nota e trovata dallo Strüver, mentre questo Autore descrisse la stilbite (*Desmin*); viceversa quest'ultima, tutt'altro che rara a Baveno, è data dal Leuze soltanto come incerta!).

(2) Strüver G., *Minerali del granito di Baveno e Montorfano*. Atti R. Acc. d. Sc. di Torino, I. 1866.

(3) Des Cloizeaux A., *Manuel de minéralogie*. 1862.

ostante la scarsità del materiale. In tutti i cristalli i piani degli assi ottici sono perpendicolari a }010{, e la bisettrice acuta per tutti i colori, positiva, coincide con l'asse y. Già nelle lamine di sfaldatura vicine alla superficie si osserva perifericamente la caratteristica divisione in settori, aventi per base le tracce delle facce della zona [010], ed estendentisi verso l'interno, limitati da linee irregolari e sinuose. Questa divisione è più accentuata e completa nelle lamine più interne: dove esiste un campo centrale indiviso, questo sembra quasi confondersi coi due settori }201{, i quali sono sempre i più estesi. L'estinzione è varia nei diversi settori, e talvolta varia alquanto anche nelle diverse parti di uno stesso settore, per una struttura zonale abbastanza evidente. In tre lamine trovai che la traccia del piano degli assi ottici per la luce gialla (*Na*) su (010) faceva con $+x$ (considerando come positivi i valori della inclinazione verso $+z$, cioè nell'angolo β ottuso, e negativi quelli verso $-z$, cioè nell'angolo β acuto) angoli di:

	Settori }201{	Settori }001{	Settori }$\bar{2}$01{
I. Lam.	$+ 8°.30'$	0	$- 7°$
II. »	$+ 10°.30'$	0	$- 18°$
III. »	$+ 2°.30'$	0	$- 13°.30'$

La dispersione delle bisettrici è abbastanza forte, e già riconoscibile all'esame della figura d'interferenza; nella lamina I. che presentava il campo centrale abbastanza largo, l'inclinazione dell'estinzione ($\mathfrak{a}$) su $+x$ fu trovata avere, per i varî colori, nel campo centrale stesso, i valori seguenti:

Luce	azzurra:	$+ 6°$
»	gialla	$+ 8°.30'$
»	rossa	$+ 10.$

La dispersione degli assi ottici è pure sensibile: $\varrho > v$.

Il valore dell'angolo apparente degli assi ottici, misurato sulla lamina anzidetta, campo centrale, fu determinato:

$$2E_a = 77°.53' \qquad (Na)$$

La *tormalina* si trova, a dir vero, citata fra i minerali di Baveno nell'opera dello Jervis (1); ma tale attestazione perde ogni valore scientifico per il fatto che non è citata la fonte della notizia, e che in realtà nessuno dei mineralogisti che si occuparono dei minerali di Baveno in modo particolare, a cominciare dal Padre Pini (2), dal Borson (3), dal Barelli (4), e venendo

(1) Jervis G., *I tesori sotterranei dell'Italia*, vol. I, Torino, 1873.

(2) Pini E., *Mémoire sur les nouvelles cristallisations* etc. Milan, 1779.

(3) Borson E., *Catalogue raisonné de la collection minéralogique* etc. Turin, 1830.

(4) Barelli V., *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna*. Torino, 1835.

fino ai moderni osservatori, come lo Strüver [1], lo Streng [2], il Leuze [3], il Gonnard [4] per non citare che i principali, nessuno, dico, ricorda la tormalina tra i minerali delle druse del nostro granito. L'origine di tale notizia è forse questa: che nei *Cenni sui graniti massicci delle Alpi piemontesi*, pubblicati come appendice alla Memoria del Gastaldi: *Studî geologici sulle Alpi occidentali* [5], lo Strüver ricorda come componente accessorio *della roccia* la tormalina; ma egli si riferisce ai graniti piemontesi in genere, e a quello di Quarona in Valsesia in particolare.

Comunque, il minerale è, nelle druse di Baveno, assai raro ed eccezionale. Si tratta di ciuffetti di aghi sottilissimi, azzurrastri, di aspetto analogo a quello della bissolite, e che con estrema facilità si staccano dalla matrice. Questo fatto, più ancora forse che la rarità, può spiegare come il minerale sia sfuggito all'attenzione dei precedenti osservatori; l'esame accurato di alcuni esemplari di fluorite e quarzo contenenti inclusioni aghiformi esilissime mi ha dimostrato spettar queste appunto alla tormalina, di cui le sottili estremità libere furono asportate, secondo ogni probabilità, durante la sommaria operazione di lavatura cui usano i cavatori stessi sottomettere gli esemplari, per renderli più puliti e più appariscenti.

I cristallini, dei quali la massima grossezza raggiunge 0,2 mm. mentre la lunghezza arriva a più di un centimetro, sono formati quasi esclusivamente dal prisma di 2° ordine $\{\bar{1}01\}$, con facce così brillanti e piane, benchè alcun poco striate, che un cristallino sottoposto a misura goniometrica mi diede, per i sei spigoli della zona verticale, i valori angolari seguenti:

$$60°.3' \; ; \; 60°.0 \; ; \; 59°.56' \; ; \; 60°.1' \; ; \; 59°.58' \; ; \; 60°.2',$$

assai bene concordanti, come ognun vede, col rispondente calcolato, di 60°.

Al microscopio è facile constatare il carattere otticamente negativo della direzione d'allungamento dei sottili cristallini, e il caratteristico intensissimo pleocroismo:

ε = bruniccio chiarissimo
ω = azzurro-verdastro carico.

Un minerale invece la cui presenza nelle druse del granito di Baveno

(1) Vedi, oltre alle due Note più sopra citate dello stesso autore, anche: Strüver G., *Sopra alcuni minerali italiani. 4. Axinite di Baveno.* Atti d. R. Acc. d. Sc. di Torino III. 1867.

(2) Streng A., *Ueber die in den Graniten von Bavenò vorkommenden Mineralien.* Neues Jahrb. für Miner. etc. 1887. I.

(3) Loc. cit. e inoltre: Leuze A., *Mineralogische Notizen.* Ber. über die 26 Versamml. d. Oberrh. geol. Ver. 1893.

(4) Gonnard F., *Notes crystallographiques.* Bull. d. la Soc. Fr. de Minéralogie, XXV, n. 4-5. 1902 (veramente l'elenco dato dal Gonnard non è completo nè esatto; la stessa citaz. del lavoro di Streng vi è errata).

(5) Mem. d. R. Com. geol. d'Italia. 1871.

meriterebbe, a parer mio, di essere ulteriormente documentata, è l'*anfibolo*, e particolarmente l'*orneblenda nera cristallizzata*. Questa vien ricordata soltanto dal Molinari, come formante « *piccoli cristalli neri, lucenti, opachi, impiantati sui cristalli di quarzo e di feldspato ortosio* » (1); dopo d'allora non fu più trovata da altri, nè io potei mai osservare nè questa nè altre varietà d'anfibolo. L'esemplare originale determinato dal Molinari, e da lui stesso registrato sotto il nome di *orneblenda* al n. 4922 del vecchio catalogo, trovasi ancora sotto lo stesso numero nella raccolta del Museo: ma i cristalli sono di *babingtonite*.

Paleontologia. — *Il Castoro quaternario del Maspino*. Nota del dott. Camillo Bosco, presentata dal Corrisp. Carlo De Stefani.

Nel museo paleontologico dell'Istituto di studî superiori di Firenze trovasi un cranio di castoro scavato dalle ghiaie quaternarie delle vicinanze del Maspino, piccolo torrente che sbocca nella Chiana presso Arezzo.

Fu già citato dal Forsyth-Major (2) e dal Rütimeyer (3) che lo riferirono al *Castor fiber* Linn. Esso manca di tutta la porzione occipitale, asportata forse da un colpo di zappa, e dell'osso malare sinistro; tutto il resto è in ottimo stato di conservazione e non presenta nessuna deformazione; i denti pure sono al completo ed in buonissimo stato. Manca la mandibola.

Alla descrizione dettagliata di questo cranio, preferisco il suo confronto col cranio delle due forme attualmente viventi di castoro, cioè la europea e la canadese.

Il cranio del Maspino presenta i seguenti caratteri differenziali

dal cranio di castoro canadese:	*dal cranio di castoro europeo:*
Cranio più grosso; più convesso superiormente e più largo nelle regioni frontale e nasale.	Cranio di uguali dimensioni; ugualmente convesso superiormente ed ugualmente largo nelle regioni frontale e nasale.
Arcate zigomatiche più ampie, col loro asse maggiore più obbliquo rispetto a quello del cranio; esse prendono origine più in alto; la loro massima larghezza trovasi nella parte posteriore, anzichè nel mezzo.	Arcate zigomatiche ugualmente ampie, col loro asse maggiore meno obbliquo; esse prendono origine alla stessa altezza; la loro massima larghezza è nella parte posteriore.

(1) Molinari F., *Nuove osservazioni sui minerali del granito di Baveno*. Atti Soc. ital. di Sc. nat. vol. XXVIII. 1885.

(2) Forsyth-Major, *Sul livello geologico del terreno in cui fu trovato il cosidetto cranio dell' Olmo* (Archivio per l'antropologia e l'etnologia, vol. VI, pag. 347, Firenze 1876).

(3) Rütimeyer, *Ueber Pliocän und Eisperiode auf beiden Seiten der Alpen*, pag. 52, Basel 1876.

dal cranio di castoro canadese:	*dal cranio di castoro europeo:*
Apofisi zigomatica dei temporali più lunga, più inclinata all' indietro, e con l'estremità esterna, sovrapposta al malare, che forma un rilievo assai più sviluppato.	Apofisi zigomatica dei temporali ugualmente lunga ed inclinata all' indietro, con estremità esterna ugualmente sviluppata.
Malari più alti, con processo post-orbitario che si avvicina assai più al corrispondente processo dei frontali.	Malari della stessa altezza, con processo post-orbitario ugualmente sviluppato.
Fossa sott'orbitaria dei mascellari più profonda e più obbliqua.	Fossa sott' orbitaria ugualmente profonda ed inclinata.
Creste parietali molto più sporgenti, che si ravvicinano più gradatamente e in modo da far supporre che la loro riunione nella cresta sagittale avvenisse alquanto più indietro.	Creste parietali ugualmente sporgenti e similmente disposte.
Frontali più larghi e più lunghi.	Frontali ugualmente lunghi, ed anteriormente ugualmente larghi, ma che si restringono assai più all' indietro.
Nasali più lunghi e più larghi con margine esterno assai meno convesso, quasi rettilineo.	Nasali di uguale forma, con margine esterno simile.
Premascellari con apofisi frontale più lunga ed apofisi palatina più larga.	Premascellari con apofisi palatina ugualmente larga, ma con apofisi frontale più lunga.
Apertura nasale alquanto più larga.	Apertura nasale un po' più larga.
Palatini più lunghi; palato che si allarga molto più sensibilmente dall' innanzi all' indietro.	Come contro.
Serie molare, proporzionalmente alle dimensioni del cranio, un po' più lunga.	Serie molare approssimativamente della stessa lunghezza.
Molari che decrescono assai più rapidamente di grossezza dall' avanti all' indietro; più sporgenti e più inclinati in fuori; pieghe di smalto che compaiono sulla superficie triturante sotto forma di linee sinuose, anzichè diritte.	Come contro.
Incisivi assai più larghi.	Come contro.

Risulta quindi che il castoro del Maspino è molto più vicino, per la

Fig. 1. — *Castor fiber* del Maspino, cranio visto dal lato destro ($^4/_5$ della grandezza naturale).

forma del cranio, al castoro europeo, di cui ha i principali caratteri che lo

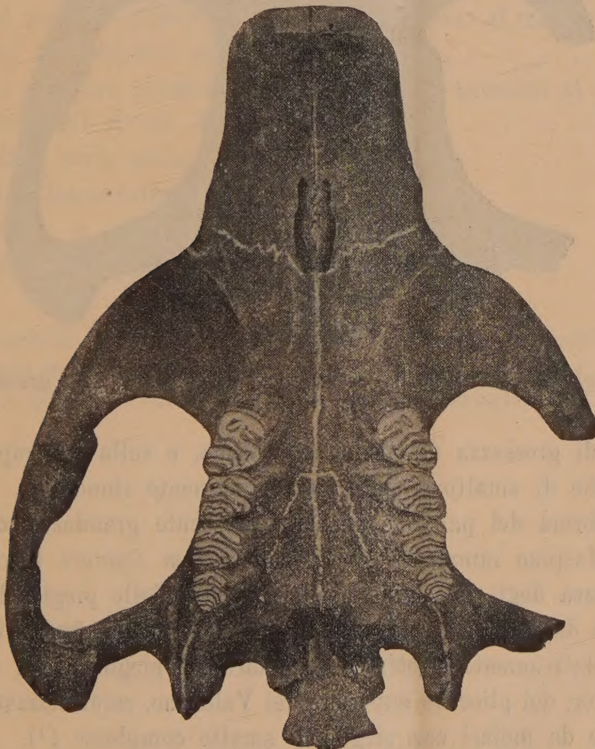

Fig. 2. — *Castor fiber* del Maspino, cranio visto dal basso ($^4/_5$ della grandezza naturale).

differenziano da quello canadese, e cioè: la forma dei nasali, con margine

esterno solo leggermente curvo, la larghezza delle regioni frontale e nasale, lo sviluppo e la direzione delle creste parietali, l'ampiezza delle arcate zigomatiche, la convessità del cranio.

Differisce però da ambedue le forme: nel palato, molto più largo all' indietro che all' innanzi; negli incisivi, più larghi; nei molari, che decrescono

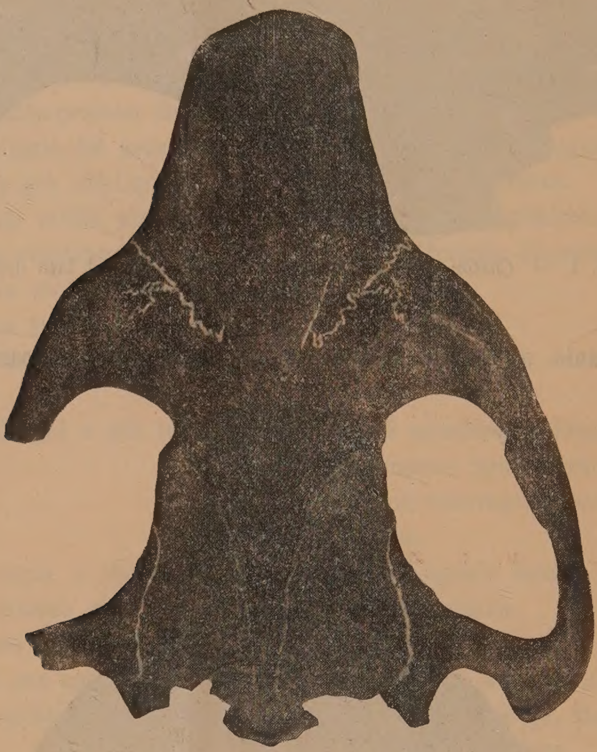

Fig. 3. — *Castor fiber* del Maspino, cranio visto dall'alto ($^4/_5$ della grandezza naturale).

rapidamente di grossezza dal primo all' ultimo, e sulla cui superficie triturante le pieghe di smalto si mostrano leggermente sinuose.

Per la forma del palato e per la decrescente grandezza dei molari il castoro del Maspino rammenta il *Trogontherium Cuvieri* Fischer; mentre per la larghezza degli incisivi e per la sinuosità delle pieghe di smalto dei molari esso è da ritenersi come una forma intermedia fra i viventi castori ad incisivi relativamente stretti ed a molari con pieghe liscie, ed il *Castor plicidens* Major, del pliocene superiore del Valdarno, caratterizzato da incisivi assai larghi e da molari con pieghe di smalto complesse (1).

(1) La descrizione del *C. plicidens* trovasi nella mia Memoria sui *Roditori pliocenici del Valdarno Superiore,* pubblicata nel vol. V (1899) della *Palaeontographia italica,* diretta dal prof. M. Canavari.

Il fatto però che tanto la larghezza quanto la forma speciale delle ossa nasali, come si riscontrano nel castoro d' Europa e che lo distinguono da quello d' America, si siano mantenute inalterate attraverso i tempi geologici, poichè si trovano anche nel castoro quaternario del Maspino ed in quello pliocenico del Valdarno Superiore, conferma una volta di più che hanno ragione quei naturalisti i quali separano specificamente il castoro d' Europa (*Castor fiber* Linn.) da quello d'America (*Castor canadensis* Kuhl) [1].

Misure.

	mm.
Massima larghezza del cranio misurata fra gli zigomi.	101
Minima larghezza del cranio fra le orbite.	29
Larghezza del cranio all'origine delle apofisi zigomatiche dei temporali.	53
Larghezza complessiva delle ossa nasali alla loro estremità anteriore.	22
Distanza dal margine alveolare alla sommità del cranio presso i processi post-orbitali	52
Distanza dal margine anteriore dei fori palatini anteriori alle ossa nasali.	36
Distanza dal margine posteriore della volta palatina al margine posteriore dei fori palatini anteriori.	55
Distanza dal margine posteriore dei fori palatini anteriori al margine anteriore degli alveoli degli incisivi	40
Lunghezza della serie molare	33
Distanza fra le faccie esterne dei $\underline{M^3}$	34
" " " " $\underline{Pr}$	26
Lunghezza dei fori palatini anteriori	15

(1) Le questioni relative alla affinità dei castori d' Europa con quelli d'America sono state ampiamente trattate da S. A. Allen nella sua *Monography of the North-American Rodentia* (U. S. geological Survey of the Territories). Washington 1877.